Ejercicio 1A Junio (mod 1) 2021 (Análisis)

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 2}{x - 1}$ (para x ≠ 1) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto (1, 1) y tiene de pendiente 2. Calcula a y b

Solución

Sabemos que la recta y = mx + n = 2x + n (tiene pendiente 2) es una asíntota oblicua (A.O.) de la función f(x) si y solo si $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0$. En la práctica $m = \lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}(f(x) - 2x)$.

Como pasa por el punto (1, 1) → f(1) = y(1) = 1 → f(1) = y(1) = 1 = 2(1) + n, *de donde n = -1.*

En los cocientes de funciones polinómicas, que es nuestro caso, la A.O. en +∞ coincide con la de -∞

De $m = 2 = \lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{ax^2 + bx + 2}{x\cdot(x - 1)} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{ax^2}{x^2} = a$, tenemos **a = 2.**

De $n = -1 = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax^2 + bx + 2}{x - 1} - 2x\right) = \{\text{sustituimos a por 2}\} = \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2 + bx + 2 - (2x)\cdot(x - 1)}{x - 1}\right) =$

$= \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2 + bx + 2 - 2x^2 + 2x}{x - 1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{bx + 2 + 2x}{x - 1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x\cdot(b + 2)}{x}\right) = b + 2$, de donde **b = -1 - 2 = -3**.

Ejercicio 2A Junio (mod 1) 2021 (Análisis)

Considera la función continua f : R → R definida por $f(x) = \begin{cases} (3x - 6)\cdot e^x & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{36(\operatorname{sen}(x) - ax)}{x^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

a) Calcula a. (1'5 puntos)
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisas x = -1. (1 punto)

Solución

(a)
Calcula a.

Como la función es continua en R, en particular en continua en x = 0.

Como f(x) es continua en x = 0 tenemos $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (3x - 6)\cdot e^x = -6\cdot e^0 = -6.$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{36(\operatorname{sen}(x) - ax)}{x^3} = \dfrac{36(\operatorname{sen}(0) - 0)}{0^3} = \dfrac{0}{0}.$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H). (Si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a - δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. La regla se puede reiterar, y también es válida si tenemos ∞/∞, y si x→∞), con lo cual tenemos:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{36(\operatorname{sen}(x) - ax)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{36(\cos(x) - a)}{3x^2} = \dfrac{36(\cos(0) - a)}{0} = \dfrac{36(1 - a)}{0}$. Como la función es continua en x = 0, el límite tiene que existir y ser finito, por tanto para seguir aplicándole la regla de L'Hôpital tiene que salir 0/0, de donde 1 – a = 0, es decir **a = 1.**

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{36(\cos(x) - 1)}{3x^2} = \left\{\dfrac{0}{0}; \text{L'H}\right\} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{36(-\operatorname{sen}(x))}{6x} = \left\{\dfrac{0}{0}; \text{L'H}\right\} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{36(-\cos(x))}{6} = \dfrac{-36}{6} = -6$. **Efectivamente el límite por la derecha es -6.**

(b)
Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisas x = -1. (1 punto)

Si x = -1 tenemos $f(x) = (3x - 6)\cdot e^x$, luego $f'(x) = 3\cdot e^x + (3x - 6)\cdot e^x = (3x - 3)\cdot e^x$

La recta tangente en x = -1 es "y - f(-1) = f '(-1)(x + 1)".

Tenemos $f(-1) = (3(-1) - 6)\cdot e^{(-1)} = -9/e$ y $f'(2) = (3(-1) - 3)\cdot e^{-1} = -6/e$

Luego **la recta tangente en x = -1 es "$y + 9/e = (-6/e)\cdot(x + 1)$", es decir $y = -6x/e - 15/e$.**

Ejercicio 3A Junio (mod 1) 2021 (Análisis)

Considera la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = 4x^3 - x^4$.
a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. (1 punto)
b) Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas. (1'5 puntos)

Solución

(a)
Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x)

Vemos que la función f(x) es continua y derivable en todo R, con dominio R.

Tenemos $f(x) = 4x^3 - x^4$ y $f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2\cdot(3 - x)$.

Si $f'(x) = 0 \to 4x^2\cdot(3 - x) = 0$, de donde $x^2 = 0$ (x = 0, doble) y x = 3, que serán los posibles extremos relativos.

Como $f'(-1) = 4(-1)^2\cdot(3 - (-1)) = 16 > 0$, **luego f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty, 0)$**

Como $f'(1) = 4(1)^2\cdot(3 - (1)) = 8 > 0$, **luego f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (0, 3)**

Como $f'(4) = 4(4)^2\cdot(3 - (4)) = -64 < 0$, **luego f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(0, +\infty)$**

Por definición en x = 3 hay un máximo relativo que vale f(3) = $4(3)^3 - (3)^4$ **= 27.**
En x = 0, la función siempre es creciente luego será un posible punto de inflexión.
Los puntos de inflexión anulan la segunda derivada y en la 3ª son distinto de cero.

Tenemos $f'(x) = 12x^2 - 4x^3$; $f''(x) = 24x - 12x^2$; $f'''(x) = 24x - 24$.

De $f''(x) = 0 \to 24x - 12x^2 = 12x\cdot(2 - x) = 0$, de donde x = 0 y x = 2, que serán los posibles puntos de inflexión.

Como $f'''(0) = -24 \neq 0$ y $f'''(2) = 24 \neq 0$, x = 0 y x = 2 son punto de inflexión que valen f(0) = 0 y f(2) = 16.
(b)
Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas.

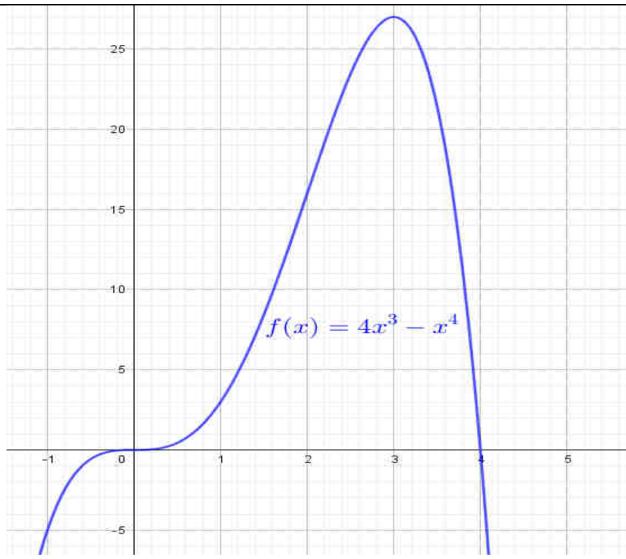
Para terminar de esbozar la gráfica veamos el comportamiento en $\pm\infty$ y el corte con los ejes.
Tenemos $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}(4x^3 - x^4) = \lim_{x\to\pm\infty} f(-x^4) = -(\pm\infty)^4 = -\infty$, luego en $\pm$ la función está en $-\infty$.
Para $x = 0 \to f(0) = 0$. Punto (0, 0)

Para $f(x) = 0 \to 4x^3 - x^4 = x^3\cdot(4 - x) = 0$, de donde x = 0 y x = 4 y los puntos de corte con los ejes son el ya visto (0, 0) y (4, 0).

El área pedida es $\int_0^4 (4x^3 - x^4)dx = \left[x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^4 = (4^4 - 4^5/5) - (0 - 0)\ u^2$ **$= 4^4\cdot(1 - 4/5)\ u^2 = 4^4\cdot(1/5)\ u^2 =$**

$= 256/5\ u^2 = 51'2\ u^2$.

Con todo lo anterior un esbozo de la gráfica es:



Ejercicio 4A Junio (mod 1) 2021 (Análisis)

Considera la función $F : [0, +\infty) \to R$ definida por $F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t})dt$.

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa x = 1.

Solución

La recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa x = 1 es "y - F(1) = F '(1)·(x – 1)".

Sabemos por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral que $F'(x) = \left(\int_0^x (2t + \sqrt{t})dt\right) = 2x + \sqrt{(x)}$, por tanto $F'(1) = 2(1) + \sqrt{(1)} = 3$.

Nos falta $F(1) = \int_0^1 (2t + \sqrt{t})dt = \int_0^1 (2t + t^{1/2})dt = \left[t^2 + \frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \left[t^2 + \frac{2\sqrt{t^3}}{3}\right]_0^1 = (1 + 2/3) - (0 + 0) = 5/3$

Por tanto **la recta tangente pedida es: y - (5/3) = 3·(x - 1), es decir y = 3x - 4/3.**

Ejercicio 5B Junio (mod 1) 2021 (Algebra)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + 2/5 \end{cases}$.

a) Discute el sistema según los valores de m. (1'5 puntos)
b) Resuelve el sistema para m = 0. ¿Hay alguna solución en la que x = 0? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. (1 punto)

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + 2/5 \end{cases}$.

(a)
Discute el sistema según los valores de m.

Sean $A = \begin{pmatrix} m & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 3m & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} m & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3m & 0 & m+2/5 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes para ver para que valores de m hace cero dicho determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 3m & 0 \end{vmatrix} F_2+2F_1 = \begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 5+2m & 0 & 0 \\ 1 & 3m & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila}\end{matrix} = -(5+2m)\cdot(0+3m) = -(3m)\cdot(5+2m)$$

Si $|A| = 0$, tenemos $-(3m)\cdot(5 + 2m) = 0$, de donde $m = 0$ y $m = -5/2$.

Si $m \neq 0$ y $m \neq -5/2$, $|A| \neq 0$ luego rango (A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas, y por el Teorema de Rouchè **el sistema es compatible y determinado y tiene solución única**.

Si m = 0, tenemos $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2/5 \end{vmatrix} C_2-2C_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 1 & -4/5 & 2/5 \end{vmatrix} \begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila}\end{matrix} = 1(-4 + 4) = 0$, rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè, el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, (más de una).

Si m = -5/2, tenemos $A = \begin{pmatrix} -5/2 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & -15/2 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -5/2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -15/2 & 0 & -5/2+2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -15/2 & 0 & -21/10 \end{pmatrix}$

.

En A como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -15/2 & 0 \end{vmatrix} = 0 – 15/2 = -15/2 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ -21/10 & -15/2 & 0 \end{vmatrix} F_2+2F_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -21/10 & -15/2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila}\end{matrix} = -2\cdot(0 - 15/2) = 15 \neq 0$, rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3**, por el Teorema de Rouchè, el **sistema es incompatible y no tiene solución**.

(b)

Resuelve el sistema para m = 0. ¿Hay alguna solución en la que x = 0? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. (1 punto)

Hemos visto en el apartado (a) que **para m = 0** teníamos **rango(A) = rango(A*) = 2** < número de incógnitas, por el Teorema de Rouchè, el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, (más de una).

Como el rango es dos, con dos ecuaciones es suficiente, la primera y la tercera:

Tenemos $\begin{cases} 2y - z = 1 \\ x = 2/5 \end{cases}$, tomando $y = b \in R$, $z = -1 + 2b$, y **las infinitas soluciones del sistema son:**

(x, y, z) = (2/5, b, -1 + 2b) con $b \in$ R.

Piden una solución con x = 0, lo cual es imposible pues “x” vale siempre 2/5.

Ejercicio 6B Junio (mod 1) 2021 (Algebra)

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.

El gerente nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora.

¿Cuantas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Solución

Sea:
x = número de botellas fabricadas cada hora,
y = número de garrafas fabricadas cada hora,
z = número de bidones fabricados cada hora.

De, "Se utiliza como materia prima 10 kg = 10000 gramos de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg = 1000 gramos para cada bidón" $\rightarrow$ 50x + 100y + 1000z = 10000.

De, "se debe producir el doble de botellas que de garrafas" $\rightarrow$ x = 2y.

De, "las máquinas se producen en total 52 productos cada hora" $\rightarrow$ x + y + z = 52.

Vamos a intentar resolverlo por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y + z = 52 \ (F_2 - F_1) \\ 50x+100y+1000z = 10000 \ (F_3/50) \end{cases} \approx \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3y + z = 52 \\ x + 2y + 20z = 200 \ (F_3 - F_1) \end{cases} \approx \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3y + z = 52 \\ 4y + 20z = 200 \ (F_3 - F_2) \end{cases} \approx$$

$$\approx \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3y + z = 52 \ (F_2 - 3F_3) \\ y + 19z = 148 \end{cases} \approx \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -56z = -392 \\ y + 19z = 148 \end{cases}$$

, de donde **z =** -392/-56 **= 7**, y + 19(7) = 148 luego tenemos **y = 15**, por tanto **x =** 2(15) **= 30**.

La solución es (x,y,z) = (30, 15, 7), es decir hay que fabricar cada hora 30 botellas, 15 garrafas y 7 bidones.

Ejercicio 7 Junio (mod 1) 2021 (Geometría)

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$.

a) Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto P(1, 0, -5). (1'5 puntos)
b) Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$. (1 punto)

Solución

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$.

(a)
Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto P(1, 0, -5). (1'5 puntos)

Como el plano π es perpendicular a la recta "s" el vector normal del plano **n** coincide con el vector director de la recta "s", el **v**, luego **n** = **v** = (-2, 1, 2).

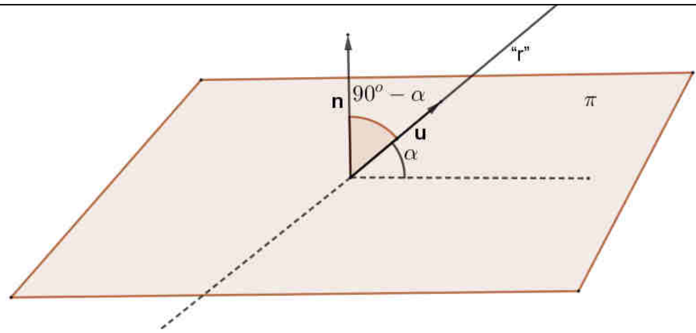
Un plano paralelo al pedido es -2x + y + 2z + K = 0, como pasa por P(1, 0, 5) $\rightarrow$ -2(1) + (0) + 2(-5) +K = 0, de donde K = 12 y **el plano pedido es $\pi \equiv$ -2x + y + 2z + 12 = 0**

(b)
Calcula el seno del ángulo que forma la recta "r" con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$. (1 punto)

Dada la recta r(A,**u**) y el plano π(**n**) se define el *ángulo que forma la recta "r" con el plano π* como el menor de los ángulos que forma la recta "r" con la recta " r' ", proyección de "r" sobre el plano

Se observa que el ángulo que forma la recta "r" con el plano π coincide con el complementario del menor de los ángulos que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano con un origen común, es decir cos(<r,π>) = |cos(α)|, ahora bien como sen(α) = cos(90º - α). Tomando el valor absoluto del seno nos aseguramos de que el ángulo es el menor y no supera lo 90º sexagesimales.

$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(<r,\pi>) = \cos(90º-\alpha) = |\cos(<\mathbf{u},\mathbf{n}>)| = \left| \frac{\vec{u} \bullet \vec{n}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} \right|.$$



El vector director de la recta "r", el **u**, es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, es decir **u** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = **i**(-6-2) – **j**(4+3) + **k**(4-9) = (-8, -7, -5), por tanto **u** = (8,7,5), (hemos tomado uno proporcional), vector normal del plano **n** = (-2, 1, 2)

u•n = -16 + 7 + 10 = 1; ||**u**|| = $\sqrt{(8^2 + 7^2 + 5^2)} = \sqrt{(138)}$; ||**n**|| = $\sqrt{(2^2 + 1^2 + 2^2)} = \sqrt{(9)} = 3$, luego:

sen(α) = sen(<r,π>) = cos(90º-α) = |cos(<**u**,**n**>)| **=** $\left|\dfrac{1}{3\cdot\sqrt{138}}\right| \cong$ **0'028375**.

Ejercicio 8 Junio (mod 1) 2021 (Geometría)

Se considera la recta $r \equiv \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ y la recta "s", que pasa por los puntos P(1, 0, 2) y Q(a, 1, 0), se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

Solución

Para la recta "s" tomamos el punto P(1, 0, 2) y el vector **PQ** = (a-1, 1, -2)

Para calcular el punto de corte de r y s, ponemos ambas recta en paramétricas con parámetro distinto e igualamos: x = x, y = y, z = z para obtener los parámetros y el punto.

Tenemos en paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = -3 + 2m \\ y = -4 + 2m \\ z = 3 + 3m \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + (a-1)n \\ y = 0 + n \\ z = 2 - 2n \end{cases}$ con m, n $\in$ R.

Igualando x = x, y = y, z = z, $\begin{cases} -3 + 2m = 1 + (a-1)n \\ -4 + 2m = n \\ 3 + 3m = 2 - 2n \end{cases}$. Resolvemos dos ecuaciones y comprobamos que verifica la tercera.

$\begin{cases} -4 + 2m = n \\ 3 + 3m = 2 - 2n \end{cases}$, sustituyendo n = -4 + 2m tenemos 3 + 3m = 2 - 2(-4 + 2m), 3 + 3m = 2 + 8 - 4m, de donde 7m = 7**, es decir m = 1 y n = -2** que verifica la tercera ecuación.

Tenemos -3 + 2(1) = 1 + (a-1)(-2) → -1 = 3 – 2a → 2a = 3 – 1 = 2,de donde **a = 2.**

El punto de corte de r y s para a = 2 es M(-3 + 2(1), -4 + 2(1), 3 + 3(1)) = M(-1, -2, 6).